C.E.S.T.I.

CENTRE D'ETUDES SUPERIEURES
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES
3, rue F. Hainaut - 93407 St-OUEN Cédex
Tél. (1) 46 06 40 35

CONCOURS D'ENTREE 1987

MATHEMATIQUES I

Epreuve de contrôle de connaissances à orientation : MATHEMATIQUES

Durée 3 heures

MARDI 9 JUIN 1987 de 9h. à 12h.

Copies de couleur JAUNE

Notations : n étant un entier positif on désigne par $\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel des suites :

$$(1) \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Le vecteur X est défini par la relation (1) dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on note $X^t = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le vecteur transposé. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire $X.Y = X^t Y$, X et $Y \in \mathbb{R}^n$, auquel est associée la norme euclidienne $\|X\| = \sqrt{X^t X}$

Toute application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, p et q entiers, est représentée dans la base canonique de $\mathbb{R}^q$ par une matrice F possédant q lignes et p colonnes que l'on écrit sous la forme suivante :

$$(2) \qquad F = (F_1, F_2, \ldots, F_p) \qquad (F : \text{matrice } q \times p)$$

dans laquelle F_j, vecteur de $\mathbb{R}^q$, est l'image par f du $j^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

On dispose de n couples (x_i, φ_i) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, n entier supérieur ou égal à 2, que l'on suppose être la représentation discrète d'une fonction $\varphi(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\varphi_i = \varphi(x_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

On se propose d'estimer la fonction φ par un développement polynomial de la forme :

$$(3) \qquad \boxed{y(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j P_j(x)} \qquad p \leq n-1$$

dans laquelle $P_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, p$ est un polynome de degré j en x.

On pose avec $y_j = y(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

I - 1 - Soit M une matrice $n \times n$. Vérifier que les matrices carrées d'ordre n forment un espace vectoriel et montrer que :

$$\sqrt{\text{trace}\,(M^t M)}$$

définit une norme sur cet espace vectoriel. On rappelle que la trace d'une matrice est la somme des termes diagonaux et on note :

$$(4) \qquad \|M\|^2 = \text{trace}\,(M^t M)$$

I - 2 - Soit M_2 une matrice carrée d'ordre 2 et X_2 un élément de $\mathbb{R}^2$. Démontrez l'inégalité :

$$\|M_2 X_2\| \leq \|M_2\| \, \|X_2\|$$

I - 3 - Si M_n est une matrice carrée d'ordre n montrer que :

$$(5) \qquad \|M_n X_n\| \leq \|M_n\| \, \|X_n\|$$

X_n étant un élément de $\mathbb{R}^n$. On pourra écrire la matrice M_n sous la forme partagée suivante :

$$M_n = \left[\begin{array}{c|c} M_{n-1} & V_{n-1} \\ \hline W_{n-1}^t & C \end{array}\right]$$

C étant un scalaire et V_{n-1} et W_{n-1} deux éléments de $\mathbb{R}^{n-1}$

La relation (5) est-elle satisfaite pour les matrices rectangulaires?

TSVP

(II) - On définit les $p+1$ vecteurs V_i par la relation suivante :

(6) $$V_i = \begin{bmatrix} P_i(x_1) \\ P_i(x_2) \\ \vdots \\ P_i(x_n) \end{bmatrix} \qquad i = 0, 1, \ldots, p$$

les polynomes $P_i(x)$ étant introduits dans la relation (3).

Les $p+1$ vecteurs V_i, $i = 0, 1, \ldots, p$ sont supposés linéairement indépendants.

II-1 Montrer que la relation (3) s'écrit matriciellement :

$$Y = V A$$

où V est une matrice que l'on précisera et A le vecteur suivant de $\mathbb{R}^{p+1}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$$

On exprimera la matrice V en fonction des vecteurs V_j.

II-2 - Montrer que la matrice $M = V^t V$ est définie $(U^t M U = 0 \Rightarrow U = 0)$ et est positive $(U^t M U > 0 \quad \forall U \neq 0 \in \mathbb{R}^{p+1})$.

II-3 - Montrer que la quantité :

$$Q(A) = \|Y - \Phi\|^2$$

passe par un minimum pour un vecteur $\tilde{A}$ de $\mathbb{R}^{p+1}$ que l'on déterminera.

Interpréter ce résultat.

II-4 - Quelles conditions doivent satisfaire les polynomes $P_j(x)$, $j = 0, \ldots, p$ pour que la matrice M soit diagonale ? Montrer que la famille de polynômes $\tilde{P}_j(x)$, $j = 0, \ldots p$ rendant M diagonale ($M = \tilde{M}$) est unique; on posera :

$$\begin{cases} \tilde{P}_0(x) = 1 \\ \tilde{P}_r(x) = x^r + \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_{ir} P_i(x) \end{cases} \qquad r = 1, \ldots, p$$

Exprimer $\tilde{P}_1(x)$, $\tilde{P}_2(x)$. Quel est l'intérêt d'utiliser une matrice $M = \tilde{M}$ diagonale ?

(III) - On définit la matrice $\tilde{E}$ par la relation :

$\tilde{E} = V \tilde{M}^{-1} V^t$. $\tilde{M}$ étant supposé diagonale dans cette question.

III-1 - Une matrice carrée est idempotente si elle est égale à son carré. $\mathbb{I}$ étant la matrice identité montrer que $\tilde{E}$ et $\mathbb{I} - \tilde{E}$ sont idempotentes.

III-2 - Montrer qu'il existe un scalaire positif $K_{(n,p)}$ indépendant de X et Φ tel que :

$$Q(\tilde{A}) \leq K_{(n,p)} \|\Phi\|^2 .$$

III-3 - Montrer que, quel que soit le nombre ϵ positif, on peut trouver un entier p inférieur à n tel que $\frac{Q(\tilde{A})}{n \|\Phi\|^2} \leq \epsilon$.

(IV) - Le tableau ci-dessous donne la distribution des ovalités d'arbres mécaniques avant et après usinage. x représente l'ovalité avant usinage et $\varphi_{(x)}$ l'ovalité moyenne après usinage déterminée à partir des observations.

x et $\varphi_{(x)}$ sont donnés en centième de millimètre et k_i est le nombre d'observations x_i avant usinage et φ_i après usinage.

x_i	1	2	3	4	5	6
k_i	21	8	13	11	11	10
φ_i	0.10	0.19	0.24	0.32	0.39	0.48

$$n = \sum_{i=1}^{6} k_i = 74$$

IV-1 - Exprimer la liaison entre x et la valeur approchée y de φ au premier ordre ($p = 1$) à l'aide de la relation (3). la matrice M est prise diagonale. Représentez sur un même graphe $y(x)$ et les points φ_i en fonction de x_i (abscisse : 1 unité = 2cm, ordonnée : 0.1 unité = 5 cm). Calculez l'erreur quadratique moyenne $\Delta^2 = Q(\tilde{A}) / n \|\Phi\|^2$

IV-2 - Jusqu'à quel ordre p faudrait-il poursuivre le développement (3) pour obtenir une erreur Δ inférieure à 0.1 ?

Conclusions.

FIN